



۱. فضاهاى عامد

(آ) خواص زیر را ثابت یا رد کنید. همه زیرفضا‌هایی از R^n هستند.

i. اگر ماتریس A دارای سطر و ستون برابر باشد؛ آیا فضای سطری با فضای ستونی این ماتریس یکیست؟

ii. اگر فضای سطری و ستونی ماتریس A برابر باشد؛ آیا میتوان نتیجه گرفت که A و A^T برابرند؟!
iii.

$$(V^\perp)^\perp = V$$

iv.

$$V \perp W \Rightarrow V^\perp \perp W^\perp$$

v.

$$V \perp W, W \perp X \Rightarrow V = X$$

vi.

$$(V + W)^\perp = V^\perp \cap W^\perp$$

(ب) برای فضای مشخص شده زیر؛ فضای عمود را بدست آورید. سپس بردار مشخص شده را به صورت $v + w$ بنویسید که در آن $v \in V$ و $w \in V^\perp$

$$V = \{v' \in R^4 : v'_1 + v'_2 - v'_3 - v'_4\} = \bullet$$

(ج) برای قسمت قبل ماتریس تبدیل (T) یک بردار دلخواه به برداری در V را بیابید. $Tv = v' : v' \in V, v \in R^4$

۲. تصویر فیثاغورث

(آ) ماتریس تصویر بروی سه صفحه زیر را بیابید.

$$y - z = \bullet$$

$$y + z = \bullet$$

$$x = \bullet$$

(ب) با توجه به ماتریس‌های بالا تصویر مثلث زیر را بروی سه صفحه بالا بیابید.

$$v_1 = (1, \bullet, 1), v_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1, \frac{3}{\sqrt{2}}\right), v_3 = \left(\frac{3}{\sqrt{2}}, \bullet, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

(ج) (امتیازی) ثابت کنید مجموع توان دو مساحت مثلث های تصویر شده برابر توان دو مساحت مثلث اولیه در فضا است. (فیثاغورث مساحت)

۳. تصویر عمود

فرض کنید P ماتریس تصویر بر زیر فضای S و ماتریس Q ماترسی تصویر بر زیر فضای S^\perp باشد.

(آ) ماتریس های PQ و $P+Q$ کدامند؟!

(ب) نشان دهید معکوس ماتریس $P+Q$ خودش است!

۴. (آ) چه رابطه ای بین رنک ماتریس های A و $A^T A$ وجود دارد؟ اثبات کنید.

(ب) فرض کنید ستون های ماتریس A مستقل خطی نیستند. ماتریس B را به گونه ای بیابید که طبق فرمول $P = B(B^T B)^{-1} B^T$ بتوان ماتریس projection مربوط به A را بدست آورد.

۵. ماتریس A را به روش QR تجزیه کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

۶. دو خط $l_1 = (2y - 1, 3y, 2)$ و $l_2 = (x, x, x)$ در فضای سه بعدی یکدیگر را قطع نمی کنند. کمترین فاصله ی بین این دو خط را d می نامیم. مقادیر x و y را طوری تعیین کنید که مقدار d^2 کمینه شود. (راهنمایی: سعی کنید مسئله را به روش کمترین مربعات ارتباط دهید)